CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

PUBBLICAZIONI
DELL'ISTITUTO PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO

N. 439

HANS A. LAUWERIER

Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord

Afdeling
TOEGEPASTE WISKUNDE

ROMA
1956

419 – **E. MAGENES.** — *Sui problemi al contorno misti per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1954)].

420 – **G. DOETSCH.** — *Teoria degli sviluppi asintotici dal punto di vista delle trasformazioni funzionali.* [Pubblicazione dell'I.N.A.C., Roma (1954)].

421 – **L. COUFFIGNAL.** — *Methodes pratiques de realisation des calculs matriciels.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1954)].

422 – *Contributo dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo al Congresso della Società tedesca per la Matematica applicata e la Meccanica* (Monaco, 20–24 aprile 1954) – COMUNICAZIONE DI: **M. J. DE SCHWARZ**, *Grundzüge eines Leitfadens zur praktischen Berechnung von Kreiszylinderschalen.* [Zeitschrift angew. Math. u. Mech., Berlin (1954)].

423 – *Contributo dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo al Convegno di Elettronica e Televisione* (Milano, 12–17 aprile 1954) – COMUNICAZIONI DI: **C. BÖHM**, *Sulla programmazione mediante formule*, **N. KITZ**, *Possible future trends in computing machines.* [Atti 4ª Sessione « Giornate della Scienza », Suppl. La Ricerca Scientifica, Roma (1954)].

424 – **L. DABONI.** — *Capacità elettrostatica di un condensatore sferico con apertura circolare.* [Atti Acc. Scienze di Torino (1954–55)].

425 – **E. DE GIORGI.** — *Un esempio di non–unicità della soluzione del problema di Cauchy, relativo ad una equazione differenziale lineare a derivate parziali di tipo parabolico.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1955)].

426 – **M. PICONE.** — *Sul calcolo delle funzioni olomorfe di una variabile complessa.* [Studies in Mathematics and Mechanics presented to Richard von Mises, Academic Press Inc., New York (1954)].

427 – **G. CAPRIZ.** — *Sulla determinazione delle linee integrali di un sistema differenziale che appartengono ad una assegnata ipersuperficie.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1955)].

428 – **M. L. PRINCIVALLI.** — *Sul sistema di equazioni lineari alle derivate parziali, relativo all'equilibrio delle volte cilindriche.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1954)].

429 – **M. J. DE SCHWARZ – M. L. VENTURA.** — *Tensioni e correnti in un cavo pupinizzato.* [Atti Acc. delle Scienze di Torino (1954–55)].

430 – **T. VIOLA.** — *Sulle funzioni quasi continue composte.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1955)].

431 – **C. PUCCI.** — *A proposito di un problema isoperimetrico.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1954)].

432 – **M. PICONE.** — *Sur un problème nouveau pour l'équation linéaire aux dérivées partielles de la théorie mathématique classique de l'élasticité.* [Second colloque sur les équations aux dérivées partielles del Centro Belga di Ricerche Matematiche (Bruxelles, 24–26 Maggio 1954)].

433 – **A. EULA.** — *Caratteristiche aerodinamiche di ali a freccia con bordo d'attacco subsonico e bordo d'uscita supersonico.* (Appendice di **M. J. DE SCHWARZ**) [L'Aerotecnica, Roma (1954)].

434 – **A. GHIZZETTI.** — *Sulle formule di quadratura.* [Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano (1954-55)].

435 – **C. PUCCI.** — *Un problema isoperimetrico per la determinazione della forma di una nave.* [Memorie Acc. Naz. Lincei, Roma (1955)].

436 – **C. BÖHM.** — *Perfezionamento di un processo iterativo atto alla divisione automatica.* [La Ricerca Scientifica, Roma (1955)].

437 – **M. PICONE.** — *Analisi di alcune memorie di Ulisse Dini sulle equazioni alle derivate parziali del second'ordine.* [Opere di Ulisse Dini, Roma (1955)].

438 – **C. PUCCI.** — *Sui problemi di Cauchy non « ben posti ».* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1955)].

Dai « Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei »
(Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali)
serie VIII, vol. XIX, fasc. 3-4 - Ferie 1955

Idrodinamica. — *Alcuni aspetti della Matematica del Mare del Nord* (*). Nota di HANS A. LAUWERIER, presentata (**) dal Socio M. PICONE.

1. INTRODUZIONE. - Dopo la disastrosa inondazione del 1° febbraio 1953 il Centro Matematico di Amsterdam, in collaborazione con il Ministero dei Lavori Pubblici e l'Istituto meteorologico di De Bilt, ha iniziato un intenso studio del comportamento di un mare poco profondo, come è il Mare del Nord, sotto condizioni meteorologiche anormali. Al Congresso Internazionale di Matematica svoltosi in settembre 1954 in Amsterdam, van Dantzig (1), ha esposto già la linea generale dell'opera compiuta dal Centro Matematico. In questa conferenza darò alcuni dettagli sullo sfondo idrodinamico (2). Vorrei sottolineare che, tenuto conto della grande complessità del problema, possono essere trattati qui a mo' d'introduzione soltanto alcuni aspetti dell'opera compiuta al Centro Matematico in questo campo. Tuttavia si trova aggiunto alla presente Nota un elenco di relazioni del Centro Matematico su questo argomento. La ricerca idrodinamica, nonché quella sui problemi - lasciati qui fuori considerazione - di statistica e di economia relativi, in quanto si svolgono al Centro Matematico, vengono dirette dal prof. D. van Dantzig.

I matematici ricorderanno la brillante opera di Henri Poincaré (3) concernente la meccanica celeste, nella quale egli ha gettato le fondamenta per l'idrodinamica dell'oceano. Forse per il fatto che tale opera era tanto brillante, dovettero passare molti anni prima che qualche altro matematico osasse aggiungervi contributi di una certa importanza. Tuttavia, nel 1920, nuovi progressi furono fatti dal Taylor (4), che ha studiato il comportamento di un canale chiuso ad una delle estremità, sottoposto a rotazione, e ha dedotto un metodo per trovare le oscillazioni proprie di un mare rettangolare anch'esso in rotazione.

Egli trovò che gli autovalori vengono determinati dagli zeri di un determinante di ordine infinito, e riuscì a trovare i primi di essi nel caso di un

(*) Questo lavoro, che è stato tradotto dall'inglese nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo in Roma, è il testo di una conferenza tenuta presso l'Istituto medesimo l'8 aprile 1955.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1955.

(1) D. VAN DANTZIG, *Mathematical problems raised by the flood disaster 1953*. « Proc. Int. Math. Congress », vol. I, Amsterdam 1954.

(2) Cfr. H. LAMB, *Hydrodynamics*. Ch. VIII.

(3) H. POINCARÉ, *Leçons de mécanique céleste*, III, Paris 1910.

(4) G. I. TAYLOR, « Proc. London Math. Soc. » (2), XX, p. 148 (1920).

mare delle dimensioni del Mare del Nord. Poi Jeffreys (5) ha considerato il problema per un mare ellittico, che si presenta più semplice per l'assenza di angoli.

Ricerche simili sono state fatte da altri autori, fra i quali Proudman e Goldsbrough, ma nella maggior parte dei casi il problema originale è stato semplificato in un modo piuttosto drastico, ad esempio riducendo le dimensioni orizzontali o trascurando l'influenza della rotazione. Però, nel caso del Mare del Nord ciò certamente non è lecito.

Nel 1947 Schalkwijk (6) ha dedicato una ricerca al Mare del Nord dal punto di vista di un meteorologo e ingegnere. Sebbene tale lavoro manchi di rigore matematico, esso dà la base per una trattazione adeguata del comportamento idrodinamico del Mare del Nord.

In ciò che riguarda le equazioni idrodinamiche del moto vengono fatte tre ipotesi fondamentali:

I) si suppone che l'acqua scorra in strati orizzontali,

II) il mescolamento laterale viene trascurato,

III) nella teoria delle onde lunghe, ove il moto è relativamente lento, la derivata totale D/Dt viene sostituita con quella parziale $\partial/\partial t$.

Allora le equazioni del moto hanno la forma seguente (7) (cfr. l'elenco delle notazioni alla fine del presente lavoro):

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{v} - g \cdot \operatorname{grad} \zeta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right). \tag{1.1}$$

A questa possiamo aggiungere l'equazione di continuità. Se $\mathbf{S} = \int_{-h}^{\circ} \boldsymbol{v} dz$ significa la corrente totale, abbiamo

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0. \tag{1.2}$$

Le condizioni al bordo relative alla coordinata verticale z sono:

a) alla superficie: $\left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right)_{z=0} = \mathbf{W}$, essendo $\mathbf{W}$ la forza del vento per unità di area della superficie,

b) sul fondo: $\boldsymbol{v} = 0$.

L'espressione $\left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right)_{z=-h} = \mathbf{B}$ rappresenta l'attrito sul fondo.

Sulla costa la componente normale di $\mathbf{S}$ s'annulla e sulla frontiera fra un mare poco profondo e un oceano di grande profondità possiamo porre $\zeta = 0$.

(5) H. JEFFREYS, « Proc. London Math. Soc. » (2), XXIII, p. 455 (1924).

(6) W. F. SCHALKWIJK, *A contribution to the study of storm surges on the Dutch coast* (1947). Tesi di laurea, Utrecht.

(7) Cfr. J. C. SCHÖNFELD, *The two-dimensional motion of long waves*. 1954. (Relazione interna del Ministero dei Lavori Pubblici d'Olanda).

Per ciò che riguarda il coefficiente di turbolenza varie ipotesi sogliono essere fatte. Ci limiteremo nella Nota presente alla formula di Fjeldstadt, che pone

$$\mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^k \qquad 0 < k < 1 \,. \tag{1.3}$$

Nel caso del Mare del Nord abbiamo i seguenti valori numerici:

$$\mu_0 = 450 \quad , \quad k = 3/4.$$

2. Il caso stazionario senza rotazione. – Schalkwijk considera il caso di un campo di vento stazionario con $\boldsymbol{\Omega} = 0$. Allora le equazioni d'equilibrio sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z}\right) - g \cdot \operatorname{grad} \zeta = 0 \\ \mu = \mu_0 \left(1 + \frac{z}{h}\right)^k \end{cases} \tag{2.1}$$

con le condizioni sul bordo

$$\begin{cases} z = 0 \quad : \quad \mu \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = \mathbf{W} \\ z = -h \quad : \quad \boldsymbol{v} = 0 \,. \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema è

$$\boldsymbol{v} = \frac{h\left(1 + \frac{z}{h}\right)^{1-k}}{\mu_0 (1-k)} \left\{ \mathbf{W} - \rho g \cdot \operatorname{grad} \zeta \left(\frac{-z(1-k) + h}{2-k} \right) \right\} . \tag{2.2}$$

L'espressione fra parentesi graffe può cambiare segno cosicché si trova un profilo del tipo rappresentato in fig. 1.

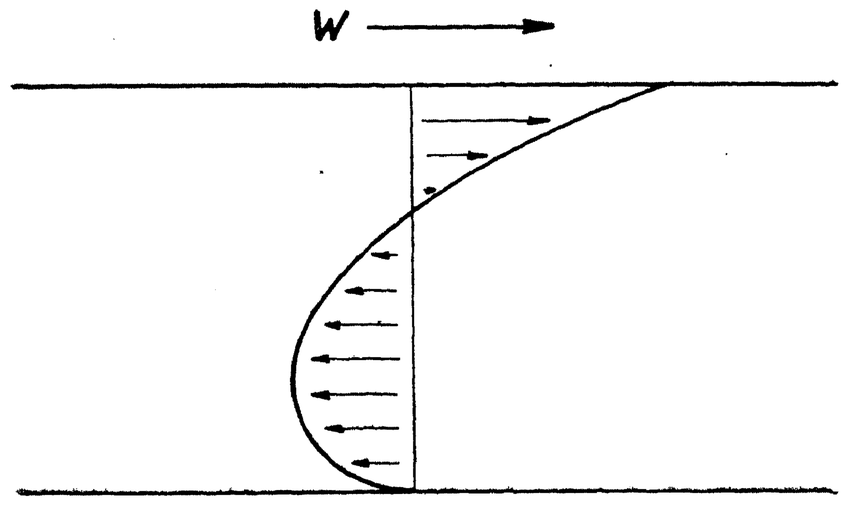

Fig. 1.

È dunque possibile che gli strati inferiori del mare scorrano nella direzione opposta a quella del vento.

La corrente totale **S** è data da

$$\mathbf{S} = \frac{h^2}{\mu_0 (1-k)(2-k)} \left\{ \mathbf{W} - \frac{2 \rho g h}{3-k} \operatorname{grad} \zeta \right\} . \tag{2.3}$$

3. IL CASO GENERALE. – Nel caso $\boldsymbol{\Omega} \neq 0$ Schalkwijk trova il risultato seguente:

$$\lambda \mathbf{S} - \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{S} = \frac{\mathbf{W}}{\rho} - gh \operatorname{grad} \zeta . \tag{3.1}$$

Se dall'altro canto l'equazione fondamentale del moto (1.1) nello stato d'equilibrio viene integrata dal fondo alla superficie otteniamo

$$- \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{S} + gh \operatorname{grad} \zeta - \frac{\mathbf{W}}{\rho} + \frac{\mathbf{B}}{\rho} = 0 , \tag{3.2}$$

cosicché effettivamente egli ha supposto:

$$\frac{\mathbf{B}}{\rho} = \lambda \mathbf{S} . \tag{3.3}$$

L'artificio che consiste nel porre l'attrito sul fondo proporzionale alla corrente totale, e l'introduzione del coefficiente di smorzamento λ permettono una restrizione delle dimensioni del problema, perché la coordinata verticale viene fatta sparire dalle equazioni.

Così otteniamo le seguenti equazioni fondamentali del moto che sono il punto di partenza per l'ulteriore ricerca,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} + \lambda \mathbf{S} - \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{S} + gh \operatorname{grad} \zeta = \dfrac{\mathbf{W}}{\rho} \\ \operatorname{div} \mathbf{S} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$

con

$$\mathbf{S} \times \boldsymbol{n} = 0 , \tag{3.5}$$

sulla costa, e

$$\zeta = 0 \tag{3.6}$$

sulla frontiera coll'oceano.

4. LA RELAZIONE FRA L'ATTRITO SUL FONDO E LA CORRENTE TOTALE. – Il metodo usato dallo Schalkwijk per arrivare all'ipotesi (3.3) può essere migliorato nel modo seguente. Introdotte le variabili complesse

$$v = v_x + i v_y \quad , \quad \gamma = - \frac{\partial \zeta}{\partial x} - i \frac{\partial \zeta}{\partial y} \quad , \quad \mathrm{W} = \mathrm{W}_x + i \mathrm{W}_y \quad , \quad \mathrm{S} = \mathrm{S}_x + i \mathrm{S}_y ,$$

e chiamato $-\Omega$ la componente di $\boldsymbol{\Omega}$ in direzione delle z, le equazioni d'equilibrio possono essere scritte nella forma

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial}{\partial z} \left(\mu \dfrac{\partial v}{\partial z} \right) - i \Omega v + g \gamma = 0 \\ \mu = \mu_0 \left(1 + \dfrac{z}{h} \right)^k , \end{cases} \tag{4.1}$$

con le condizioni al bordo

$$(4.2)\qquad \begin{cases} z = 0 & : \quad \mu \dfrac{\partial v}{\partial z} = W \\ z = -h & : \quad v = 0 . \end{cases}$$

La soluzione di questo sistema può essere scritta come segue

$$v = A u^{(1-k)/2} J_{\alpha-1}(\beta u^{(2-k)/2} i^{3/2}) + B u^{(1-k)/2} J_{1-\alpha}(\beta u^{(2-k)/2} i^{3/2}) - i \frac{g}{\Omega} \gamma ,$$

ove

$$u = 1 + \frac{z}{h} \quad , \quad \alpha = \frac{1}{2-k} \quad , \quad \beta = \left(\frac{\rho\Omega}{\mu_0}\right)^{1/2} 2\,\alpha h .$$

Le costanti A e B possono essere determinate facilmente dalla (4.2). Per la corrente totale S troviamo

$$(4.3)\qquad i\Omega S = \frac{W}{\rho} + gh\gamma - \frac{1}{\varphi_{-\alpha}(\beta i^{3/2})}\left(\frac{W}{\rho} + gh\gamma\, \varphi_\alpha(\beta i^{3/2})\right),$$

ove

$$\varphi_\alpha(p) = \Gamma(1+\alpha)\left(\frac{p}{2}\right)^{-\alpha} J_\alpha(p) .$$

Nel caso del Mare del Nord abbiamo approssimativamente $\Omega = 0{,}44$ e $h = 40$. Allora ricaviamo da (4.3)

$$i\Omega' S = \frac{\dfrac{W}{\rho} + g h' \gamma}{1 - \dfrac{i\lambda'}{\Omega'}} ,$$

ove $\Omega' = 0{,}41$, $h' = 36$ e $\lambda' = 0{,}08$.

Questo è già il risultato di Schalkwijk, correttevi alcune costanti del 10 % incirca.

Però tenuto conto della variabilità di h e Ω possiamo adottare la (3.4) con (3.5) e (3.6) come una rappresentazione appropriata del comportamento della corrente totale in un mare poco profondo.

5. Un campo di vento stazionario su un mare di profondità costante. – La soluzione completa della (3.4) con le condizioni al bordo (3.5) e (3.6) per il caso stazionario di un mare di profondità costante non troppo grande è stata ottenuta da Veltkamp [8] nel Centro Matematico di Amsterdam. Il suo metodo può essere esposto come segue. Vengono introdotte la funzione di corrente θ e due potenziali di vento U e V definiti rispettivamente mediante

$$(5.1)\qquad S_x = -\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad , \quad S_y = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

(8) *Relazioni* TW 23 *e* TW 24 *del Centro Matematico.*

e

$$(5.2)\qquad \begin{cases} W_x = -\rho\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} + \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) \\ W_y = \quad \rho\left(\dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y}\right). \end{cases}$$

Egli dimostra allora che

$$(5.3)\qquad A = (\lambda\theta - U) + i\,(\Omega\theta - c^2\zeta - V)$$

è una funzione analitica di $z = x + iy$. Le condizioni al bordo sono

$$(5.4)\qquad \mathrm{Re}\,A\,(z) = \mathrm{cost.} - U$$

sulla costa,

$$(5.5)\qquad \mathrm{Im}\,(\lambda - i\Omega)\,(A + U + iV) = 0$$

sulla frontiera dell'oceano.

Mediante rappresentazione conforme tale problema può essere risolto per ogni tipo di mare.

6. UN CAMPO DI VENTO NON STAZIONARIO SU UN MARE DI PROFONDITÀ VARIABILE. – Ciò presenta un problema molto difficile e soltanto in pochissimi casi non banali può essere trovata una soluzione mediante metodi analitici.

Allo scopo di esporre i metodi usati trattiamo uno di quei casi con qualche dettaglio.

Consideriamo un mare in forma di semipiano $y > 0$, la cui profondità sia una funzione esponenziale della sola y:

$$(6.1)\qquad h = h_0\, e^{\beta y}.$$

Consideriamo un campo di vento uniforme dipendente solamente dal tempo.

Allora le equazioni fondamentali sono

$$(6.2)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) S_x - \Omega S_y = \dfrac{W_x}{\rho} \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \lambda\right) S_y + \Omega S_x + gh\,\dfrac{\partial \zeta}{\partial y} = \dfrac{W_y}{\rho} \\ \dfrac{\partial S_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \zeta}{\partial t} = 0 \end{cases}$$

con le condizioni al bordo

$$(6.3)\qquad y = 0 \quad , \quad S_y = 0.$$

Applicata la trasformazione di Laplace

$$(6.4)\qquad \bar{\zeta} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt}\,\zeta\,(y\,,\,t)\,dt,$$

le equazioni (6.2) e (6.3) assumono una forma più semplice.

Eliminando poi $\overline{S}_x$ e $\overline{S}_y$ otteniamo

$$\frac{\partial^2 \overline{\zeta}}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial y} - \frac{p\{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}}{gh(p+\lambda)} \overline{\zeta} = 0 \tag{6.5}$$

con

$$gh\rho (p+\lambda) \frac{\partial \overline{\zeta}}{\partial y} = (p+\lambda)\overline{W}_y - \Omega \overline{W}_x \tag{6.6}$$

per

$$y = 0.$$

La soluzione delle (6.5) e (6.6) è

$$\overline{\zeta} = \frac{1}{\rho k g h_0} \frac{u^{1/2} I_1\left(\frac{2ku^{1/2}}{\beta}\right)}{I_0\left(\frac{2k}{\beta}\right)} \left\{ \frac{\Omega}{p+\lambda} \overline{W}_x - \overline{W}_y \right\}, \tag{6.7}$$

ove

$$k^2 = \frac{p\{(p+\lambda)^2 + \Omega^2\}}{gh_0(p+\lambda)} \tag{6.8}$$

e

$$u = e^{-\beta y}. \tag{6.9}$$

Se abbiamo un mare in forma di semipiano e di profondità costante, possiamo eseguire il passaggio $\beta \to 0$ in (6.7). Mediante lo sviluppo asintotico per I_0 e I_1 troviamo

$$\lim_{\beta \to 0} \overline{\zeta} = \frac{e^{-ky}}{\rho k g h_0} \left\{ \frac{\Omega}{p+\lambda} \overline{W}_x - \overline{W}_y \right\}. \tag{6.10}$$

Applicando poi alle (6.7) e (6.10) i soliti metodi per l'antitrasformazione di Laplace si trova la $\zeta(y, t)$.

7. Il Mare del Nord. – Abitualmente il Mare del Nord viene rappresentato per mezzo di un rettangolo i cui lati hanno il rapporto 2 : 1. Come prima approssimazione la profondità può considerarsi costante. Allora le equazioni sono della forma

$$\begin{cases} (p+\lambda)\overline{S}_x - \Omega \overline{S}_y + c^2 \dfrac{\partial \overline{\zeta}}{\partial x} = \dfrac{\overline{W}_x}{\rho} \\ (p+\lambda)\overline{S}_y + \Omega \overline{S}_x + c^2 \dfrac{\partial \overline{\zeta}}{\partial y} = \dfrac{\overline{W}_y}{\rho} \\ \dfrac{\partial \overline{S}_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{S}_y}{\partial y} + p\overline{\zeta} = 0 \end{cases} \tag{7.1}$$

con le condizioni al bordo

$$\begin{cases} x = \pm a & \overline{S}_x = 0 \\ y = 0 & \overline{S}_y = 0 \\ y = b & \overline{\zeta} = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

La costa olandese è sull'asse delle x vicina all'origine e la frontiera dell'oceano supposto di infinita profondità è situata a $y = b$.

Ci sono vari metodi per affrontare questo problema, e ne discuteremo in questo luogo soltanto uno che sembra promettente.

Faremo la restrizione che il campo di vento sia indipendente da x, ma ammettiamo, naturalmente, che esso possa dipendere da y e t. Così il caso di una larga depressione che avvicinerebbe la costa olandese, è incluso in tale modello.

Risolviamo in un primo tempo un problema più semplice. Consideriamo la striscia $0 < y < b$ e cerchiamo di trovare una soluzione delle equazioni non omogenee (7.1) che soddisfi alle condizioni per $y = 0$ e $y = b$. Questa soluzione non dipende da x e può essere determinata come nella sezione precedente. Se questa soluzione viene chiamata S'_x, S'_y, ζ', allora rappresentiamo la soluzione del caso rettangolare nella forma

$$S_x = S'_x + S''_x \qquad S_y = S'_y + S''_y \qquad \zeta = \zeta' + \zeta'' ,$$

cosicché S''_x , S''_y , ζ'' soddisfano a equazioni omogenee, a condizioni omogenee per $y = 0$ e $y = b$, ma a condizioni non omogenee per $x = \pm a$, precisamente $S''(y) = \Psi(y)$.

Considerando ora le equazioni omogenee associate alle (7.1) per S''_x , S''_y , ζ'', otteniamo, eliminati $\bar{S}''_x$ e $\bar{S}''_y$, per $\bar{\zeta}''$ l'equazione differenziale di Helmholtz

$$\Delta\bar{\zeta}'' - k^2\bar{\zeta}'' = 0 , \tag{7.3}$$

ove k^2 ha lo stesso significato come in (6.8).

Equazioni simili si ottengono anche per $\bar{S}''_x$ e $\bar{S}''_y$.

Seguiamo poi l'idea di Taylor per lo sviluppo di $\bar{S}''_x , \bar{S}''_y$ e $\bar{\zeta}''$ in una serie di Fourier (con soli coseni), ad esempio

$$\bar{S}''_x = \sum_0^\infty \{a_n \operatorname{Ch} \alpha_n x + b_n \operatorname{Sh} \alpha_n x\} \cos \frac{n\pi y}{b} ,$$

ove

$$\alpha_n^2 = k^2 + \frac{n^2\pi^2}{b^2} .$$

Questi sviluppi non sono ortogonali rispetto al rettangolo $-a < x < a$, $0 < y < b$ e le condizioni al bordo condurranno dunque a relazioni lineari fra un numero infinito di coefficienti a_n e b_n .

Così questo problema può essere ridotto alla soluzione di un numero infinito di equazioni lineari non omogenee.

Nel caso di Taylor si trova un sistema infinito di equazioni lineari omogenee, e il determinante di tale sistema determina le oscillazioni proprie. Taylor considera soltanto un rettangolo chiuso, ma il suo metodo per la

determinazione degli autovalori è stato generalizzato e applicato al caso del rettangolo aperto da van Dantzig e Veltkamp, al Centro Matematico. Per ulteriori dettagli concernenti questo problema e problemi simili il lettore viene rinviato alle pubblicazioni del Centro Matematico di Amsterdam.

Relazioni del Centro Matematico di Amsterdam connesse collo studio del Mare del Nord.

1953. G. W. VELTKAMP, *A problem of conformal representation*, TW 22 (Olandese).
G. W. VELTKAMP, *The influence of stationary windfields upon a sea of constant depth*, TW 23 (Olandese).

1954. G. W. VELTKAMP, *The influence of stationary windfields upon a sea of partially constant depth*, TW 24 (Olandese).
G. W. VELTKAMP, T. C. BRAAKMAN, *Solution of a singular integral equation*, TW 25 (Olandese).
T. C. BRAAKMAN, *The level of a sea with constant or partially constant depth under influence of stationary windfields*, TW 27 (Olandese).
H. A. LAUWERIER, *Some boundary value problems with a skew derivative*, TW 29 (Olandese)..
D. VAN DANTZIG, *Applications of Taylor's method on the proper oscillations of the North Sea* (Nota interna).

1955. G. W. VELTKAMP, *Singular solutions of the two–dimensional Helmholtz equation* (Nota interna).
H. A. LAUWERIER, *The motion of a shallow sea under influence of a non–stationary windfield*, TW 31 (Inglese).
H. A. LAUWERIER, *The motion of a halfplane sea under influence of a non–stationary windfield*, TW 32 (Inglese).
H. A. LAUWERIER, *The expansion of a function into a Fourier series with prescribed phases, valid in thè half–period interval*, TW 33 (Inglese).
G. W. VELTKAMP, *Energy relations in a rotating sea*, TW 34 (Inglese).

ELENCO DELLE NOTAZIONI.

x , y , z = coordinate cartesiane
t = tempo
v_x , v_y = componenti della velocità delle particelle d'acqua
ζ = variazione di altezza della superficie disturbata, posto uguale a zero il livello della superficie non disturbata
g = accelerazione di gravità
h = profondità
ρ = densità
Ω = coefficiente di Coriolis $= 2\,\omega \sin \varphi$, ove ω è la velocità angolare della terra e φ la latitudine geografica
W_x , W_y = componenti della forza del vento
B_x , B_y = componenti dell'attrito sul fondo
λ = coefficiente di smorzamento
S_x , S_y = componenti della corrente totale.

Roma, 1955. — Dott. G. Bardi, Tipografo dell'Accademia Nazionale dei Lincei.

397 – **C. PUCCI.** — *Il problema di Cauchy per le equazioni lineari a derivate parziali.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953) – Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1953)].

398 – **T. VIOLA.** — *Limitazioni per i momenti del quart'ordine d'una funzione, definita nello spazio Euclideo ad n dimensioni ed ivi limitata.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1953)].

399 – **G. CAPRIZ.** — *Precessioni di un giroscopio pesante con armatura asimmetrica.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1953)].

400 – **C. BOHM.** — *Nuovi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una nota equazione differenziale non lineare.* [Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1953)].

401 – **F. BERTOLINI.** — *Osservazioni sulle funzioni omogenee.* [Bollettino Unione Mat. Italiana, Bologna (1953)].

402 – **C. PUCCI.** — *Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1953)].

403 – **B. DE FINETTI - G. RODINÒ - N. KITZ.** — «*Symposium on automatic digital computation*» *del National Physical Laboratory, Teddington* (Londra, 25–28 marzo 1953). [La Ricerca Scientifica, Roma (1954)].

404 – **C. PUCCI.** — *Compattezza di successioni di funzioni e derivabilità delle funzioni limiti.* [Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1954)].

405 – **S. FAEDO.** — *Sul problema della diga a gravità di minimo volume.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1953)].

406 – *Contributo dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo al Convegno internazionale di Geometria differenziale (Padova–Venezia–Bologna–Pisa, 20–26 settembre 1953)* – COMUNICAZIONE DI: **M. PICONE,** *Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni.* [Atti Convegno internaz. di Geometria differenziale (1953)].

407 – **E. DE GIORGI.** — *Osservazioni relative ai teoremi di unicità per le equazioni differenziali a derivate parziali di tipo ellittico, con condizioni al contorno di tipo misto.* [Ricerche di Matematica, Napoli (1953)].

408 – **M. PICONE.** — *Maggiorazione di un polinomio di Legendre e delle derivate in un'ellisse a quello confocale.* [Bollettino Unione Mat. Italiana, Bologna (1953)].

409 – **D. DAINELLI - E. APARO.** — *Considerazioni sulle più recenti macchine calcolatrici elettroniche ed il loro impiego.* [La Ricerca Scientifica, Roma (1953)].

410 – **M. PICONE.** — *Sulle condizioni necessarie per un estremo, nel calcolo delle variazioni.* [Memorie Acc. Naz. Lincei, Roma (1954)].

411 – **E. DE GIORGI.** — *Su una teoria generale della misura* (r – *1*)*–dimensionale in uno spazio ad* r *dimensioni.* [Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1954)].

412 – **F. BERTOLINI.** — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace in due variabili indipendenti.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953–1954)].

413 – **E. FANELLI.** — *Linee d'influenza nelle travi continue.* [Rivista di Ingegneria, Milano (1954)].

414 – **G. FICHERA.** — *Formule di maggiorazione connesse ad una classe di trasformazioni lineari.* [Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1954)].

415 – **C. PUCCI.** — *Nuove ricerche sul problema di Cauchy.* [Memoria Acc. delle Scienze di Torino (1954)].

416 – **E. APARO.** — *Un procedimento iterativo per la risoluzione numerica delle equazioni algebriche.* [La Ricerca Scientifica, Roma (1954)].

417 – **C. BÖHM.** — *Calculatrices digitales. Du déchiffrage de formules logico–mathématiques par la machine même dans la conception du programme.* [Annali di Mat. pura ed applicata, Bologna (1954)].

418 – **F. BERTOLINI.** — *Sul problema di Cauchy per l'equazione di Laplace, in tre variabili indipendenti.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1954)].

(Segue a pag. 2 della copertina)

PUBBLICAZIONI DELL'ISTITUTO NAZIONALE PER LE APPLICAZIONI DEL CALCOLO

Serie II

381 – **C. PUCCI.** — *Sulla compattezza di successioni di funzioni reali.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953)].

382 – **L. DABONI.** — *Applicazione al caso del cubo di un metodo per il calcolo per eccesso e per difetto della capacità elettrostatica di un conduttore.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953)].

383 – **F. BERTOLINI.** — *Studio del funzionale* $\int_L \rho^\alpha \, ds$. [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1953)].

384 – **G. CAPRIZ.** — *Sulla applicazione del metodo della trasformata parziale di Laplace ad intervallo di integrazione finito ad un problema di elasticità piana.* [Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa (1953)].

385 – **C. BIRINDELLI.** — *Integrazione dei sistemi lineari ai differenziali totali illimitatamente integrabili in due variabili indipendenti in un prescritto campo più volte connesso.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953)].

386 – **F. BERTOLINI.** — *Una generalizzazione del teorema di Abel sulle serie di potenze.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953)].

387 – **E. APARO - D. DAINELLI.** — *Esperienze sull'impiego di alcune calcolatrici elettroniche.* [La Ricerca Scientifica, Roma (1953)].

388 – **M. PICONE.** — *Exposition d'une méthode d'intégration numérique des systèmes d'équations linéaires aux dérivées partielles, mise en oeuvre a l'Institut national pour les Applications du Calcul. Résultats obtenus et résultats que l'on pourrait atteindre.* [Comptes-rendus du colloque international «Les machines à calculer et la pensée humaine», Centre Nat. Recherche Scientifique, Paris (1951)].

389 – **G. FICHERA.** — *Sulla torsione elastica dei prismi cavi.* [Rend. di Mat. e delle sue applic., Roma (1953)].

390 – **G. FICHERA.** — *A proposito delle mie Note «Sui teoremi di esistenza della teoria del potenziale e della rappresentazione conforme».* [Bollettino dell'Unione Mat. Italiana, Bologna (1953)].

391 – **F. H. RAYMOND.** — *Le calcul analogique. Principes et contribution à une théorie générale.* [Pubblicazione dell'I.N.A.C., Roma (1954)].

392 – **H. HORNICH.** — *Die Existenz von regulären Lösungen bei allgemeinen linearen partiellen Differentialgleichungen.* [Rend. Circolo Mat. di Palermo (1953)].

393 – **F. BERTOLINI.** — *A new proof of the Existence of the minimum for a Classical Integral.* [Compositio Mathematica, Groningen (1953)].

394 – *Contributo dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo al Symposium on Simultaneous Linear Equations and the Determination of Eigenvalues, National Bureau of Standards (Los Angeles, California 23-25 Agosto 1951)* – Comunicazioni di: **FICHERA,** *On General Computation Methods For Eigenvalues and Eigenfunctions.* **FICHERA,** *Results of Recent Experiments in the Analysis of Periods Carried Out in the Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.* [Applied Matemathics Series, NBS, Washington (1953)].

395 – **M. J. DE SCHWARZ.** — *Ueber das Verhalten der Torsionsfunktion in der Nähe von einspringenden Ecken massiver und hohler Stäbe.* [Oesterreichisches Ingenieur-Archiv, Wien (1953)].

396 – **F. BERTOLINI.** — *Traiettorie luminose in uno spazio trasparente. Esistenza di regioni non illuminate da una sorgente luminosa puntiforme.* [Rend. Acc. Naz. Lincei, Roma (1953) – Ricerche di Matematica, Napoli (1953)].

(Segue a pag. 3 della copertina)